

LUCRAREA 8

PROGRAMAREA NELINIARĂ ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR DIN ENERGETICĂ. METODE DE ORDINUL 0

8.1. Aspecte generale

Programarea neliniară are o foarte mare importanță în rezolvarea problemelor de optimizări, în general, și în energetică, în particular, deoarece, destul de frecvent, metodele corespunzătoare acestora sunt singurele mijloace de soluționare.

În această clasă intră acele probleme în care funcția obiectiv și (sau) restricțiile sunt expresii matematice neliniare. Această neliniaritate provine dintr-o considerare mai riguroasă a proceselor reale, dar, din punct de vedere tehnic, creează dificultăți în găsirea soluției optimale. Pentru cazul particular, funcția obiectiv neliniară și restricțiile liniare, se poate aplica metoda gradientilor proiectați.

Dificultățile rezolvării problemelor de programare neliniară se datorează faptului că aici nu se mai întâlnesc facilitățile din programarea liniară (optimul este atins într-un vârf al poliedrului convex), iar, pe de altă parte, este dificil să se facă diferența dintre optimul local și optimul global. Există o clasă de probleme pentru care optimul local este și global. Aceasta se numește programarea convexă. Importanța acestei categorii de probleme rezidă din faptul că dispune de metode eficiente de rezolvare și, în plus, există numeroase exemple de aplicații care se încadrează în această clasă.

Problema generală de programare matematică constă în găsirea extremului unei funcții de mai multe variabile:

$$\text{FO: } F(X) = F(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (8.1)$$

$$\text{RE: } \begin{aligned} g_i(X_1, X_2, \dots, X_n) &\leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \\ X_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Utilizând notația:

$$X^k = [X_1^k, X_2^k, \dots, X_n^k]_t, \quad (8.3)$$

funcția $F(X)$ este convexă dacă verifică relația:

$$F(\lambda X^1 + (1 - \lambda)X^2) \leq \lambda F(X^1) + (1 - \lambda)f(X^2); \quad \lambda \in [0, 1] \quad (8.4)$$

unde X^1 și X^2 sunt două puncte oarecare din domeniul de definiție al funcției, presupus convex.

Problema de programare matematică, pentru care domeniul de soluții descris de restricțiile (8.2) este convex, iar funcția obiectiv (8.1) pentru același domeniu este convexă, poartă denumirea de problemă de programare convexă.

În general, pentru rezolvarea unei probleme de programare neliniară se folosește relația iterativă:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda^{(k)} d^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (8.5)$$

unde:

$d^{(k)} \in R^n$ - reprezintă o direcție de deplasare în iterația (k) din punctul curent $X^{(k)}$;

$\lambda^{(k)}$ - scalar ce reprezintă lungimea pasului de deplasare în iterația curentă.

Metodele de optimizare diferă prin procedurile concrete de alegere a parametrilor $d^{(k)}$ și $\lambda^{(k)}$. Având în vedere reducerea efortului de calcul privind implementarea procedurii iterative, în fiecare etapă, informația disponibilă pentru obținerea direcției $d^{(k)}$ și a pasului $\lambda^{(k)}$ este strict limitată la valorile funcției și a primei ei derivate.

După tipul de informații folosite distingem următoarele grupuri de metode:

- **metode de ordinul 0** care folosesc valorile funcției în punctul curent și vecinătăți;
- **metode de ordinul 1** care folosesc și derivata de ordinul 1 (gradientul);
- **metode de ordinul 2** care folosesc derivata de ordinul 1 și derivata de ordinul 2 (hessianul).

8.2. Metode de ordinul 0

Faptul că nu sunt necesare expresiile analitice ale derivatei funcției obiectiv $F(X)$ constituie un avantaj major al acestor metode. Ca urmare nu există condiții referitoare la continuitatea și derivabilitatea funcției $F(X)$. Trebuie remarcat că există totuși și un dezavantaj al acestor metode legat de faptul că au o viteză de convergență scăzută.

Metodele de ordin 0 au la bază relația iterativă (8.5), cu mențiunea că stabilirea noii direcții de explorare se face pe baza unei serii de evaluări a funcției obiectiv $F(X)$, într-o manieră specifică fiecărei metode, iar lungimea pașilor $\lambda^{(k)}$ este, deasemenea, proprie fiecărei metode.

Faptul că nu sunt utilizate valorile derivatelor prezintă avantajul suplimentar că, printr-o alegere corespunzătoare a criteriilor de stop, se poate evita terminarea iterațiilor într-un punct de inflexiune. În literatură sunt prezentate o varietate de metode de optimizare fără evaluarea derivatelor, precum și foarte multe variante ale acestora. În continuare se prezintă metoda optimizării ciclice de-a lungul axelor de coordonate, care este cea mai ușor de aplicat.

Optimizarea ciclică de-a lungul axelor de coordonate

Descrierea metodei este sugerată de însăși denumirea sa, respectiv se face o explorare unidimensională pe direcții care coincid cu axele de coordonate. Astfel, în relația (8.5) direcțiile $d^{(k)}$ sunt succesiv axele sistemului ortogonal de coordonate:

$$d^{(0)} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^t, d^{(1)} = [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^t, \dots, d^{(n-1)} = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1]^t \quad (8.6)$$

Pașii $\lambda^{(k)}$ pe direcțiile respective pot fi determinați cu următoarea relație:

$$\lambda^{(k)} = - \frac{(g^{(k)}, d^{(k)})}{(d^{(k)}, H^{(k)} d^{(k)})}, \quad (d^{(k)}, H^{(k)} d^{(k)}) > 0 \quad (8.7)$$

unde:

$H^{(k)}$ – matricea hessiană într-un punct curent $X^{(k)} \in R^n$;

$g^{(k)}$ – gradientul funcției obiectiv într-un punct curent $X^{(k)} \in R^n$.

Procesul iterativ se va încheia când va fi îndeplinit criteriul de stop impus. Potrivit acestei metode optimul este atins în n iterații. Dacă suprafețele respective prezintă o vale

sau o creastă care nu este paralelă cu axele de coordonate, această metodă nu poate fi aplicată.

8.3. Exemplu numeric

Să se determine minimumul funcției:

$$F(X) = \min(x_1^2 + 4 \cdot x_2^2 - 4)$$

folosind metoda de optimizare ciclică de-a lungul axelor de coordonate, indicându-se ca punct de pornire $X^{(0)} = [5 \ 4]^t$.

Conform metodei valoarea optimă se va atinge în 2 iterații.

Iterația 1

Se face deplasarea pe direcția $d^{(0)} = [1 \ 0]^t$, astfel încât pentru determinarea unei noi aproximații se va utiliza relația iterativă:

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \lambda^{(0)} d^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda^{(0)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + \lambda^{(0)} \\ 4 \end{bmatrix}$$

Pentru determinarea lungimii pasului de deplasare $\lambda^{(0)}$, se introduc valorile $x_1^{(1)}$ și $x_2^{(1)}$, în expresia funcției obiectiv F :

$$F(\lambda^{(0)}) = (5 + \lambda^{(0)})^2 + 4 \cdot 4^2 - 4 = (\lambda^{(0)})^2 + 10 \cdot \lambda^{(0)} + 85$$

În continuare se face derivata expresiei $F(\lambda^{(0)})$ în raport cu $\lambda^{(0)}$ și se anulează.

$$\frac{\partial F(\lambda^{(0)})}{\partial \lambda^{(0)}} = 2 \cdot \lambda^{(0)} + 10 = 0 \rightarrow \lambda^{(0)} = -5$$

Valoarea pasului de deplasare se introduce în relația iterativă obținându-se astfel valoarea noii aproximații $X^{(1)}$:

$$X^{(1)} = [x_1^{(1)} \ x_2^{(1)}]_t = [0 \ 4]^t.$$

Iterația 2

Se face deplasarea pe direcția $d^{(1)} = [0 \ 1]^t$, astfel încât pentru determinarea unei noi aproximații relația iterativă devine:

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \lambda^{(1)}d^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} + \lambda^{(1)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 + \lambda^{(1)} \end{bmatrix}$$

Pentru determinarea lungimii pasului de deplasare $\lambda^{(1)}$, se introduc valorile $x_1^{(2)}$ și $x_2^{(2)}$, în expresia funcției obiectiv F :

$$F(\lambda^{(1)}) = 0 + 4 \cdot (4 + \lambda^{(1)})^2 - 4 = (\lambda^{(1)})^2 + 8 \cdot \lambda^{(1)} + 15$$

În continuare, se face derivata expresiei funcției $F(\lambda^{(1)})$ în raport cu $\lambda^{(1)}$ și se anulează.

$$\frac{\partial F(\lambda^{(1)})}{\partial \lambda^{(1)}} = 2 \cdot \lambda^{(1)} + 8 = 0 \rightarrow \lambda^{(0)} = -4$$

Valoarea pasului de deplasare se introduce în relația iterativă obținându-se astfel valoarea aproximației $X^{(2)}$:

$$X^{(2)} = [x_1^{(2)} \quad x_2^{(2)}]^t = [0 \quad 0]^t,$$

ceea ce era evident încă de la început.

8.4. Rezolvarea problemelor PN cu ajutorul funcțiilor MatLab

În general, o problemă de găsire a minimumului unei funcții neliniare în absența restricțiilor are următoarea formă:

$$\min_X F(X) \tag{8.8}$$

unde $F(X)$ este o funcție neliniară ce returnează un scalar.

Sintaxa

$$X = \mathbf{fminunc}(@fun, X0) \tag{a}$$

$$X = \mathbf{fminunc}(@fun, X0, options) \tag{b}$$

$$[X, val_funcție, convergenta, informatii] = \mathbf{fminunc}(...) \tag{c}$$

unde:

- (a) procesul are ca punct de plecare punctul $X0$ și găsește minimumul funcției descrisă în fișierul *fun*. $X0$ poate fi un vector, un scalar sau o matrice;
- (b) minimizează funcția descrisă în fișierul *fun*, cu parametrii de optimizare precizați în structura *options*;
- (c) X – soluția problemei;

val_functie – returnează valorile funcțiilor obiectiv corespunzătoare soluției găsite;

convergenta – dă informații cu privire la convergența procesului. Dacă *convergenta* = 1, funcția converge la soluția X , dacă *convergenta* = 0, numărul maxim de evaluări a funcției sau numărul maxim de iterații a fost depășit, dacă *convergenta* = -1 procesul de optimizare este divergent;

informatii – furnizează informații despre procesul de optimizare (numărul de iterații, numărul de evaluări ale funcției, algoritmul folosit).

Parametrii de intrare și ieșire

fun – fișier funcție ce conține expresiile funcțiilor obiectiv. Acest fișier are ca variabilă de intrare X , iar ca variabilă de ieșire un scalar F , a cărui valoare reprezintă funcția obiectiv evaluată în punctul X . Fișierul *fun* poate fi apelat astfel:

$$X = \mathbf{fminunc} (@fun, X0)$$

$$\mathbf{function} F = \mathbf{fun}(X)$$

Exemplu numeric

Să se minimizeze funcția:

$$F(X) = 4 \cdot (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$

cu ajutorul funcției Matlab **fminunc**, indicându-se ca punct de pornire $X^{(0)} = [2 \ 3]^t$.

Se va construi fișierul **fun** în care se va introduce expresia funcției $F(X)$.

```
function F = fun(X)
F = 4*(X(1)-2)^2 + (X(2)-3)^2;
```

Cu secvența Matlab:

```
>> X0 = [2;3];
>> options = optimset('Display', 'iter');
>> [X,val_funcie]=fminunc(@fun,X0,options)
```

se obțin următoarele rezultate:

Iteration	Func-count	f(x)	Step-size	First-order optimality
0	3	68		32
1	6	39.5156	0.03125	24
2	9	1.24843	1	2.23
3	12	0.687399	1	1.65
4	15	6.5037e-005	1	0.0321

Optimization terminated: relative infinity-norm of gradient less than options.TolFun.

x =

2.0000

3.0000

fval =

6.5037e-05

8.5. Desfășurarea lucrării

1. Se studiază textul lucrării.
2. Să se determine minimumul funcției:

$$F(X) = \min(x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 - 1)$$

folosind metoda de optimizare ciclică de-a lungul axelor de coordonate, indicându-se ca punct de pornire $X^{(0)} = [3 \ 1]^t$. Rezultatele obținute vor fi comparate cu cele obținute prin folosirea funcției Matlab **fminunc**.

3. Să se determine minimumul funcției:

$$F(X) = \min(x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 - 2)$$

folosind metoda de optimizare ciclică de-a lungul axelor de coordonate, indicându-se ca punct de pornire $X^{(0)} = [2 \ 1]^t$. Rezultatele obținute vor fi comparate cu cele obținute prin folosirea funcției Matlab **fminunc**.